

蘋果彈性模數衰退模式之研究¹

黃禮棟² 陳必超³

摘要：本試驗利用諧振頻率、質量及密度等參數計算出蘋果之彈性模數，並將紅蘋果 (Red Delicious Apple) 儲藏於溫度維持20°C，相對濕度維持90%之控制環境室中，以每三天測量聲波反應並利用 FFT 分析以求得諧振頻率後再予轉換成彈性模數之方式研究彈性模數隨時間變化之模式。由實驗得到之結果顯示，其彈性模數隨時間之變化關係為指數式的，其時間常數，k 值，約介於0.08至0.20之間。而由諧振頻率所計算之彈性模數與由模式所計算而得之彈性模數間之線性相關 (R²) 為0.907~0.998，證明紅蘋果於貯藏過程中彈性模數之衰退過程為指數式的 (exponential)。

關鍵詞：蘋果、諧振頻率、彈性模數、頻譜。

由於消費意識不斷提高，故確保蔬菜、水果於收穫、加工及上市時之品質 (texture) 越來越顯得重要⁽¹⁾。利用顏色及糖度等做為判別成熟度的方法雖已行之多年，然而判別蘋果品質的最主要因素仍為其硬度⁽²⁾ (脆度)，除了美麗的色澤等外觀因素之外，堅實的蘋果較為消費者所喜愛⁽²⁾。而對於生產者及零售者而言，使蘋果保持相當的硬 (脆) 度直到銷售出去以求得最高利潤是很重要的。各種利用諧振頻率做為非破壞性測定果實堅實度 (firmness) 之技術已十分普遍，而較早的研究人員多以水果之質量 m，及諧振頻率 f，形成硬度係數，f²m，以指示硬度，此硬度係數與質的有很高的相關^(1,8,10)。但較接近理論的硬度指示法為 $f^2 m^{2/3} \rho^{1/3}$ ，在近年來已為多數研究人員所採用^(4,5,8)。

本研究結果顯示，貯藏中蘋果之彈性模數隨時間而變化之關係為指數式的，在貯藏初期，衰退速度極快，中、後期之衰退速度急速減緩。

材料與方法

供試驗用之十三個紅蘋果 (Red Delicious Apple) 從果樹摘下並立刻做完第一次聲波反應測定後，即保存於相對濕度為90%，溫度為20°C之控制環境室中。以後每間隔三天即做一次聲波反應測定，直到彈性模數衰退速率減緩為止，共測定十五次。測試聲波及分析頻譜之方法為將供試之蘋果置於直徑為50公厘之塑膠玻璃杯上，並於杯口與蘋果之接觸面上放置三片海綿以防止噪音由其它來源傳至蘋果上產生干擾。測試時以小彈簧片一端附加之橡皮鈕扣激勵位於蘋果赤道上之一點，使其產生音頻範圍之振動後，由位於180°對角位置距離蘋果表面約2公厘處之小麥克風感應其振波並經由擴大器放大後由示波器將信號顯示於螢光幕上 (圖1) 並同時將此信號予以數位化記錄於示波器之暫存器中，

1. 臺灣省農業試驗所 研究報告第 1681 號。

2. 本所農業工程系助理研究員，臺灣省 臺中縣 霧峰鄉。

3. 美國加利福尼亞州戴維斯加州大學農業與生物工程學系教授，美國 加州 戴維斯。

該信號顯示振幅與時間之關係。此波形之數位化資料可經由 RS-232 界面卡及 BASIC 程式轉輸至 IBM 電腦 (圖2)，再用由 FORTRAN 語言編譯之 FFT (Fast Fourier Transform) 程式做頻譜分析^(3,8)，將振幅大小及對應頻率以數字儲存下來，圖3所示為此種信號之振幅與頻率關係圖，圖中相對最高振幅之點即為諧振頻率。所得到之諧振頻率可由

$$E = \frac{8(1+\nu)\pi^2 f^2 \rho \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}}}{H^2}$$

$$= 2(6)^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} \frac{(1+\nu)f^2 m^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}}{H^2} \quad (1)$$

公式轉化成彈性模數^(2,8)。

其中

E：彈性模數 (MPa)

f：諧振頻率 (Hz)

m：質量 (kg)

ρ ：密度 (kg/m³)

ν ：Poisson's ratio

H：無次元頻率 (與振動模式及 Poisson's ratio 有關)

又因為蘋果之 Poisson's ratio, ν 之值為 0.3^(6,8)，故而與第一諧振頻率相對應之 H 值為 2.6462^(6,8)。因此公式(1)可以簡化為

$$E = 5.6411 f^2 m^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

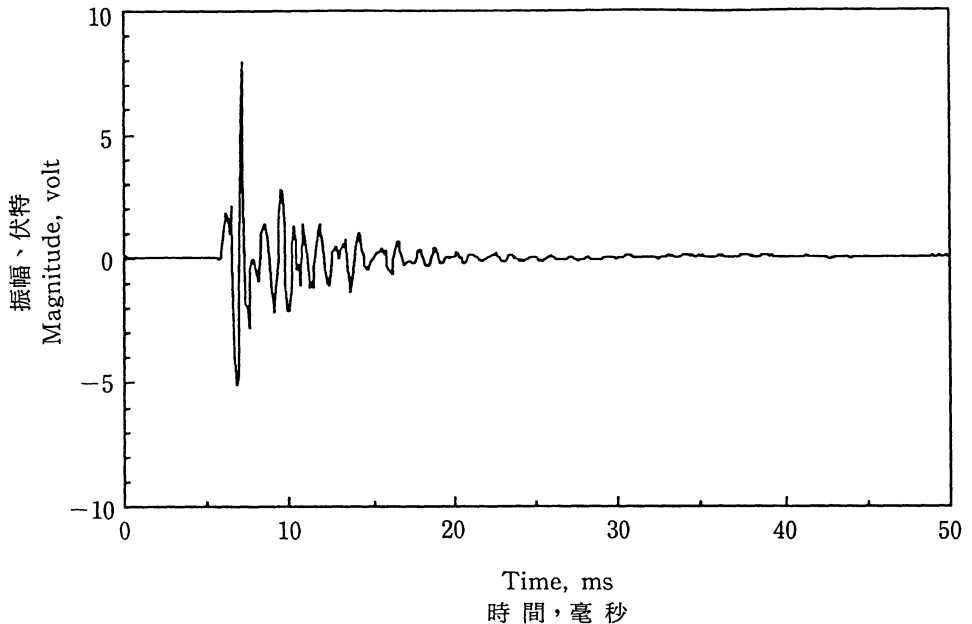


圖1. 麥克風檢測之振波

Fig. 1. Acoustic signal detected by microphone

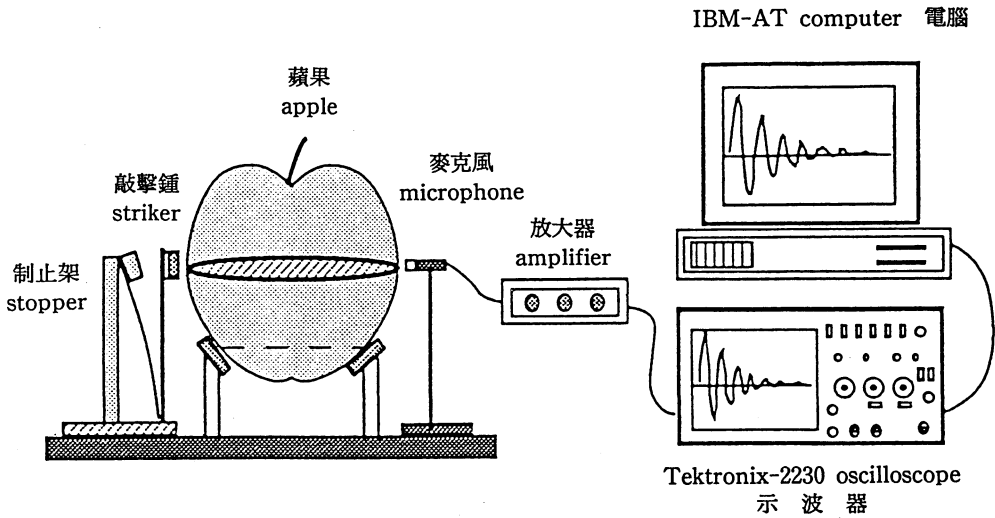


圖2. 振波反應測試裝置

Fig. 2. Instrumentation and apple orientation for acoustic response measurement

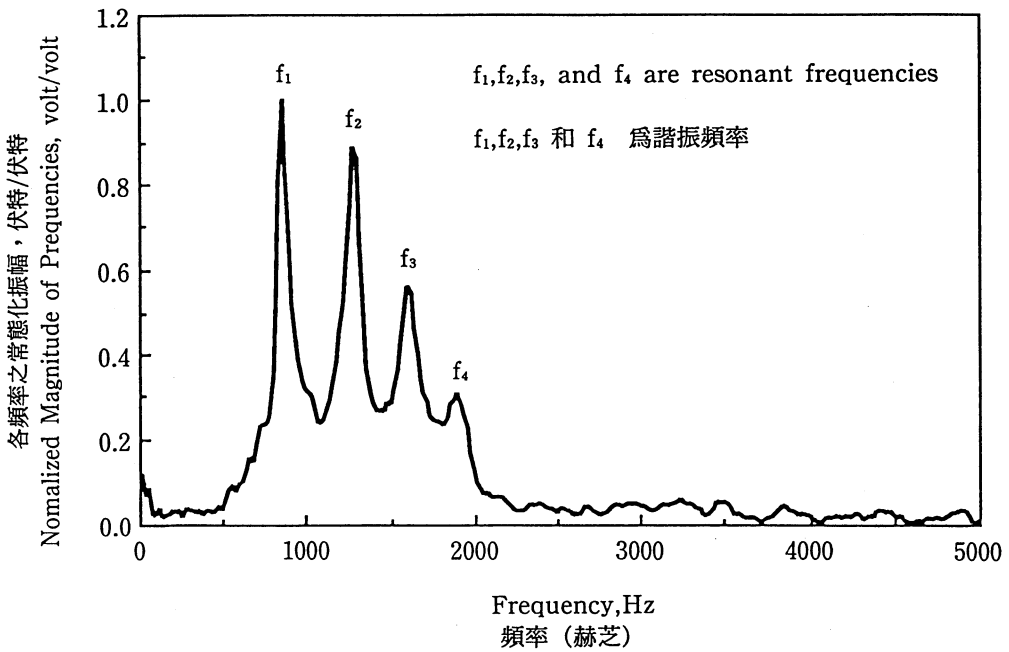


圖3. 振幅與頻譜關係圖

Fig. 3. Frequency spectrum obtained with FFT

其中

f_1 ：第一諧振頻率 (Hz)

經過十五次測試分析後，確定其彈性模數之衰退速率已達到平緩程度，即停止測定。但為瞭解其質量及密度之變化，於最後一次測試後，將每一蘋果之質量及密度再予以測定一次。

彈性模數衰退模式之推導過程如下：

假設 Poisson's ratio, ν 之值維持不變，則由公式(1)得知，E 值和 $f^2 m^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{1}{3}}$ 成正比。

若： E_i 表示試驗開始時之彈性模數

E_r 表示試驗結束時之彈性模數

則試驗期間之彈性模數， E_t ，可以表示為

$$E_t = E_r + (E_i - E_r) e^{-kt} \tag{3}$$

其中之 k ，稱為時間常數。

如此，則當 $t=0$ ，即試驗開始時，彈性模數為 E_i ；而於 $t=\infty$ 時，彈性模數為 E_r 。

為簡化公式，忽略質量和密度於每間隔三天之測定期間之微量變化，則將公式(1)代入公式(3)之後，得到

$$f_t^2 = (f_i^2 - f_r^2) e^{-kt} + f_r^2 \tag{4}$$

其中

f_i = 試驗開始時之第一諧振頻率 (Hz)

f_r = 試驗結束時之第一諧振頻率 (Hz)

f_t = 試驗進行期間之第一諧振頻率 (Hz)

假設

$$y_p = \left[\frac{f_t^2 - f_r^2}{f_i^2 - f_r^2} \right] = e^{-kt} \tag{5}$$

及

$$y = \log_e (y_p) \tag{6}$$

則

$$y = \log_e \left[\frac{f_t^2 - f_r^2}{f_i^2 - f_r^2} \right] = -kt \tag{7}$$

如欲以經過原點之線性迴歸及最小誤差平方和法解出 k 值，可假設⁽⁹⁾

$$y_j = -kt_j + e_j \tag{8}$$

及

$$SSE = \sum_{j=1}^N e_j^2 = \sum_{j=1}^N (y_j + kt_j)^2 \tag{9}$$

其中之註脚 j 表示第 j 次測定而得或衍生之數據，而 e_j 為第 j 點數據 Y_j 之值與迴歸直線間之誤差值，而 SSE (Sum of Squared Error) 為誤差平方和。

為求得 k 值以產生最小誤差平方和，將 SSE 對 k 做偏微分並令其結果等於零⁽⁹⁾，得

$$\frac{\partial SSE}{\partial k} = - \sum_{j=1}^N 2 (y_j + kt_j) t_j = 0 \tag{10}$$

故

$$k = \frac{- \sum_{j=1}^N (y_j t_j)}{\sum_{j=1}^N (t_j^2)} \tag{11}$$

又因

$$\frac{\partial^2 SSE}{\partial k^2} = \sum_{j=1}^N 2 t_j^2 > 0 \tag{12}$$

可證明以此法求得之 k 值使誤差平方和 SSE 達到極小值。

於求取每一個蘋果之 k 值過程中，由於最後五次之諧振頻率值呈現波動狀態，表示彈性模數衰退速率已減緩至平緩程度，故取此五次之平均值做為最終頻率， f_r ，而初始頻率 f_i 則為第0天之第一諧振頻率值，該品種之第一諧振頻率對時間變化之關係列於表1，而質量、密度、 R^2 （測得之第一諧振頻率及由模式計算之第一諧振頻率間）及 k 值則列於表2。

表1. 十三個紅蘋果之第一諧振頻率（赫芝）對儲藏時間之變化

Table 1. First resonant frequencies (Hz) versus time of 13 Red Delicious apples

time (days)	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	R12	R13
0	870	880	820	800	900	850	780	890	870	830	910	880	1,000
3	720	740	710	690	820	670	630	800	790	730	780	810	930
6	580	610	530	680	680	610	580	640	650	590	600	770	900
9	510	530	450	560	630	560	530	570	620	530	540	740	890
12	430	460	390	530	550	470	450	490	540	460	460	710	820
15	390	410	350	450	480	410	390	450	480	410	420	530	700
18	380	380	320	410	440	380	360	430	440	380	400	480	660
21	360	350	310	380	400	350	330	400	420	350	380	440	600
24	340	340	300	350	380	330	300	380	400	350	350	390	520
27	340	330	280	330	370	320	280	370	380	340	350	380	480
30	310	320	280	320	350	310	270	350	350	320	330	360	450
33	320	320	290	310	340	320	280	350	360	320	350	350	440
36	310	320	280	310	340	310	270	340	350	310	350	350	420
39	310	310	280	300	350	310	280	350	350	310	350	350	420
42	320	320	250	290	330	300	250	330	340	310	360	350	390

註：R_j；j=1, 2, 3, ………, 13；表示第 j 個蘋果

表2. 十三個紅蘋果之時間常數，相關係數，始終質量及密度

Table 2. Decaying time constant, k , R^2 between f_r and f_i , initial and final mass and density for 13 Red Delicious apples

Apple No.	k value	R^2	Mass (kg)		Density (kg/m ³)	
			initial*	final*	initial*	final*
R1	0.1484	0.997	0.199	0.170	846	816
R2	0.1596	0.998	0.212	0.183	849	829
R3	0.1767	0.988	0.231	0.191	835	808
R4	0.1176	0.967	0.251	0.222	829	822
R5	0.1276	0.986	0.172	0.151	838	823
R6	0.1552	0.983	0.208	0.179	841	821
R7	0.1417	0.981	0.235	0.203	846	827
R8	0.1338	0.991	0.172	0.147	826	790
R9	0.1191	0.990	0.196	0.171	850	828
R10	0.1383	0.995	0.220	0.190	856	836
R11	0.2046	0.982	0.171	0.144	852	821
R12	0.1101	0.884	0.183	0.162	827	818
R13	0.0804	0.907	0.139	0.123	856	851

* initial weight and density....measured on day 0

* final weight and density....measured on day 42

結果與討論

由圖4所示之從某一蘋果所測得之第一諧振頻率及由模式計算之諧振頻率對儲藏時間之關係圖及圖5所示之同一蘋果之測得諧振頻率之平方所代表之彈性模數值與由模式推算而得之頻率平方所代表之彈性模數質比較可知，Red Delicious 品系蘋果貯藏期間之彈性模數衰退為指數式，其 f_1 與 f_1^2 之 R^2 值介於0.907與0.998之間，而 k 值之變化範圍則約為0.08至0.20之間。由表一所示得知，於第0天時，十三個蘋果之第一諧振頻率變化範圍為780Hz至1,000Hz，相差220Hz；此乃表示其成熟度並不一致。而於第42天時之第一諧振頻率差異則較小，可以推論為較硬之蘋果於相同儲藏條件下，彈性模數衰退速度較快。由表2知，質量及密度於儲藏過程中均有變化，而質量之變化較密度為大。儲藏實驗之溫度選為20°C乃為短期內觀測彈性係數之衰退情形，若使用較低溫儲藏，則彈性模數之衰退速度將會減緩。

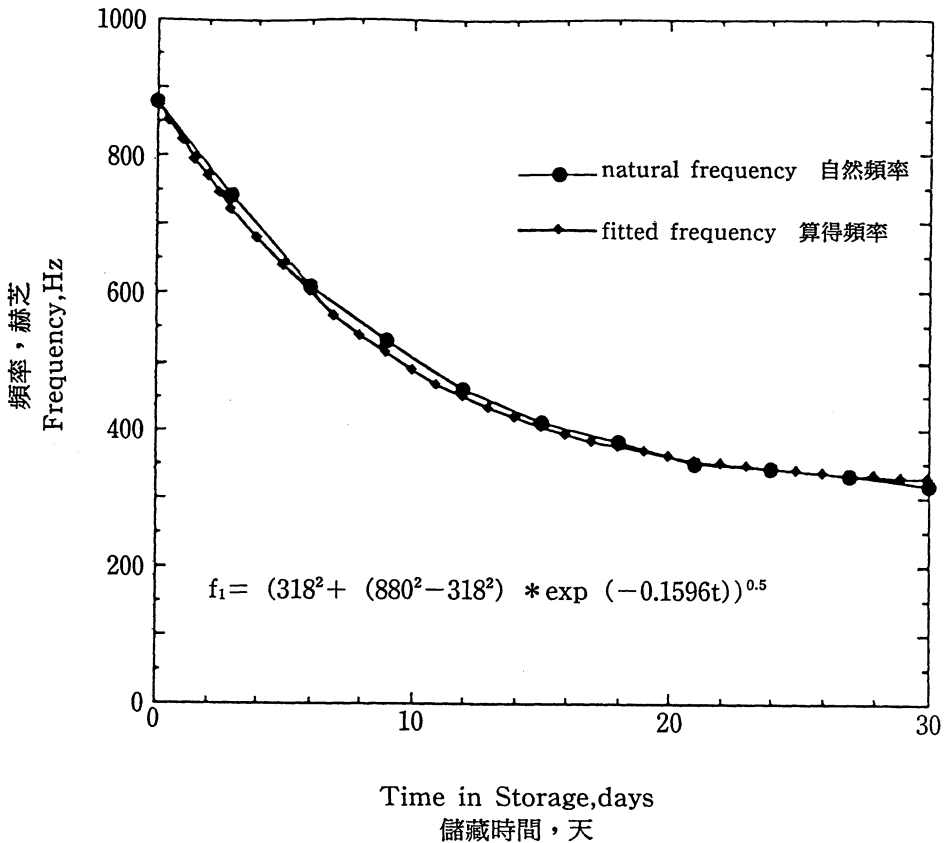


圖4. 由模式計算及由量測而得之第一諧振頻率對儲藏時間之變化比較

Fig. 4. The calculated first frequencies and the measured first resonant frequencies versus time

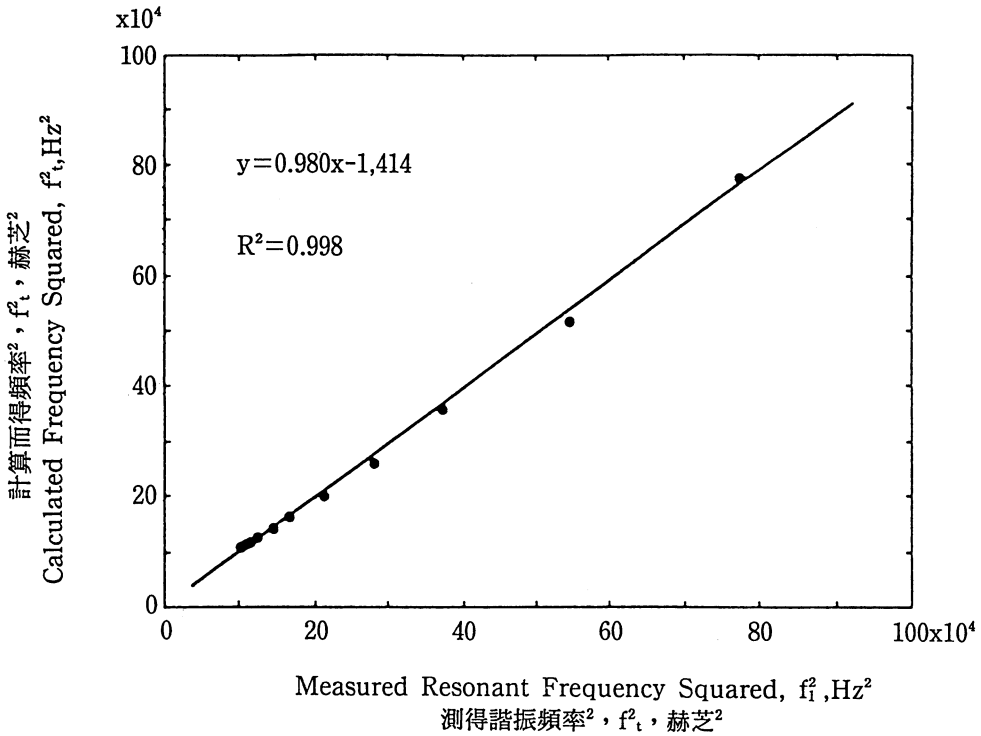


圖5. 由模式計算及由量測而得之頻率平方 (彈性模數) 相關圖

Fig. 5. Correlation between the square of calculated first frequencies and that of the measured first resonant frequencies

紅蘋果之彈性模數衰退過程，可以用指數式表示。然因其 k 值範圍變異大，如何建立預估 k 值之方法，仍有待研究。若能於每次測試頻率後，測量密度及質量，將更有助於彈性模數衰退模式之研究。

誌 謝

本文之試驗數據分析承蒙美國戴維斯加州大學生物與農業工程學系 (Department of Biological and Agricultural Engineering, University of California, Davis) 教授 Dr. Shrini K. Upadhyaya 之協助，謹此致謝。

引用文獻

1. Abbott, J. A., N. F. Childers, G. S. Bachman, J. V. Fitzgerald, and F. J. Matusik. 1968. Acoustic vibration for detecting textural quality of apples. American Society for Horticultural Science 93 : 725-737.
2. Armstrong, P. R., H. R. Zapp, and G. K. Brown. 1990. Impulse excitation of acoustic vibrations in apples for firmness determination. TRANSACTIONS of the ASAE 33(4) : 1353-1359.

3. Brigham, E. O. 1988. The fast Fourier transform and its application. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
4. Chen P., and Z. Sun. 1991. A review of nondestructive methods for quality evaluation and sorting of agricultural products. *Journal of Agricultural Engineering Research* 49 : 85—98.
5. Cooke, J. R. 1972. An interpretation of the resonant behavior of intact fruits and vegetables. *TRANSACTIONS of the ASAE* 15(6) : 1075—1080.
6. Cooke, J. R., and R. H. Rand. 1973. A mathematical study of resonance in intact fruits and vegetables using a 3-media elastic sphere model. *Journal of Agricultural Engineering Research* 18 : 141—157.
7. Finney E. E. Jr. 1978. Engineering techniques for nondestructive quality evaluation of agricultural products. *Journal of Food Protection* 41(1) : 57—62.
8. Huarng, L. 1992. Resonant frequencies and modes of acoustic vibration of apples. Unpublished Ph. D. dissertation, Department of Biological and Agricultural Engineering, University of California, Davis, CA 95616.
9. Walpole, R. E., and R. H. Myers. 1989. Probability and Statistics for engineers and scientists. 4th edition. Macmillan Publishing Company, New York.
10. Yamamoto, H., M. Iwamoto, and S. Haginuma. 1980. Acoustic impulse response method for measuring natural frequency of intact fruits and preliminary applications to internal quality evaluation of apples and watermelons. *Journal of Texture Studies* 11 : 117—136.

A Study on the Modulus of Elasticity Decaying Model for Apples¹

Li-Duhng Huarng² and pictiaw Chen³

Summary

Resonant frequencies as well as mass, density and Poisson's ratio have been used as parameters to obtain the modulus of elasticity of Red Delicious Apples in this study. The apples were immediately stored in a controlled atmosphere room with temperature maintained at 20°C and relative humidity at 90% right after being picked from trees. The apples were tested for its acoustic spectrum responses in every three-day interval. A FORTRAN FFT (Fast Fourier Transform) was applied to analyze the frequency content of each spectrum. The study showed that the modulus of elasticity decayed with time exponentially. The time constant, k , is approximately between 0.08 and 0.20. The correlation coefficient (R^2) of the linear regression between the modulus of elasticity obtained from the resonant frequencies and that from the model is between 0.907 and 0.997. This gives a strong evidence that the exponentially decaying model for Red Delicious Apples are appropriate.

Key words : Apple, Resonant frequency, Modulus of elasticity, Frequency spectrum.

1. Contribution No. 1681 from Taiwan Agricultural Research Institute.

2. Respectively, Assistant Agricultural Engineer, Department of Agricultural Engineering, TARI, Wufeng, Taichung, Taiwan 413, ROC.

3. Professor, Department of Biological and Agricultural Engineering, University of California, Davis, CA 95616 USA.